## 基础课10 指数与对数的运算

### 课时评价·提能

#### 基础巩固练

1. [2024·琼海模拟] （ B ）.

A. 9 B. C. 3 D.

[解析].故选.

2. [2024·绵阳模拟]设，则的值是（ B ）.

A. 1 B. 2 C. 4 D. 9

[解析]由，得，即，所以.故选.

3. [2024·河南模拟]已知函数则（ B ）.

A. B. C. 2 D. 4

[解析]，.故选.

4. [2024·天津模拟]已知,，则（ C ）.

A. 25 B. 5 C. D.

[解析]因为，，即，所以.故选.

5. [2024·陕西模拟]若且,,，且，则（ A ）.

A. 2 B. C. 3 D.

[解析]由题意得，所以.故选.

6. 已知实数，，满足，，，则（ A ）.

A. 2 B. C. 3 D.

[解析]由题意得，，

由，得，化简得，即.

因为，所以，即.

由指数函数的值域可得，，所以，即.故选.

7. [2024·大连模拟]若实数,满足，则（ A ）.

A. B. C. D.

[解析]由题意知，，.

，，，，

，即.

在 上单调递增，，

.

设，则.

与 在 上单调递增，在 上单调递增，，即.故选.

8. [2024·河南联考]若函数为奇函数，则（ B ）.

A. 0 B. C. D.

[解析]，

因为 为奇函数，所以，即，解得，经检验，满足题意,

所以，所以.故选.

#### 综合提升练

9. [2024·湖北联考]（多选题）已知正数，，满足，则（ ABD ）.

A. B. C. D.

[解析]设，，则，，，

所以，正确；

因为，所以，

因为，所以，

所以，正确；

因为，所以，正确；

因为，则，所以，错误.

故选.

10. [2024·陕西模拟]（多选题）下列结论正确的是（ BD ）.

A. B.

C. D.

[解析]因为，所以，错误；

因为，，所以，正确；

因为 ，，

所以 ，错误；

因为，所以，正确.故选.

11. [2024·四川适应性考试]  .

[解析].

12. 已知实数，满足，，则1.

[解析]因为，化简得，所以，

又，所以构造函数，

因为函数，在 上均单调递增，所以 在 上单调递增，因为，所以，解得，，所以.

#### 应用情境练

13. [2024·郑州模拟]地震释放出的能量（单位：焦耳）与地震里氏震级之间的关系式为.若地发生7.8级地震，它所释放出来的能量为，地发生4.6级地震，它所释放出来的能量为，则是的  倍.

[解析]由题意知，，所以，，故，则.

14. [2024·文昌预测]荧光定量是一种通过化学物质的荧光信号，对在扩增进程中呈指数级增加的靶标进行实时监测的方法.在扩增的指数时期，当荧光信号强度达到阈值时，的数量与扩增次数满足，其中为的初始数量，为扩增效率.已知某被测标本扩增6次后，数量变为原来的100倍，则扩增效率约为  参考数据：,

[解析]由题意得，即，可得，解得.

#### 创新拓展练

15. [2024·宜宾模拟]音乐是由不同频率的声音组成的.若音的音阶频率为，则简谱中七个音，，，，，，组成的音阶频率分别是，，，，，，，其中后一个音阶频率与前一个音阶频率的比值是相邻两个音的台阶.上述七个音的台阶只有两个不同的值，记为 ，， 称为全音， 称为半音，则0.

[解析]因为相邻两个音的频率比值分别为，，，，，，

由题意知，，所以.

16*.*(2024·九省适应性测试)离散对数在密码学中有重要的应用*.*设*p*是素数,集合*X=*{1,2,…,*p-*1},若*u*,*v*∈*X*,*m*∈N,记*uv*为*uv*除以*p*的余数,*um*为*um*除以*p*的余数;设*a*∈*X*,1,*a*,*a*2,…,*ap-*2两两不同,若*an=b*(*n*∈{0,1,…,*p-*2}),则称*n*是以*a*为底*b*的离散对数,记为*n=*log(*p*)*ab.*

(1)若*p=*11,*a=*2,求*ap-*1*.*

(2)对*m*1,*m*2∈{0,1,…,*p-*2},记*m*1*m*2为*m*1*+m*2除以*p-*1的余数(当*m*1*+m*2能被*p-*1整除时,*m*1*m*2*=*0)*.*证明:log(*p*)*a*(*bc*)*=*log(*p*)*ab*log(*p*)*ac*,其中*b*,*c*∈*X.*

(3)已知*n=*log(*p*)*ab.*对*x*∈*X*,*k*∈{1,2,…,*p-*2},令*y*1*=ak*,*y*2*=xbk.*证明:*x=y*2*.*

注:一般地,设*n*为正整数,*a*和*b*为整数,如果*a*和*b*被*n*除后余数相同,那么称*a*和*b*模*n*同余,记作*a*≡*b*(mod *n*)*.*例如,12与*-*6被9除后余数均为3,所以12≡*-*6(mod 9)*.*

[解析](1)若*p=*11,*a=*2,且注意到210*=*1024*=*93*×*11*+*1,

则*ap-*1*=*210*=*1*.*

(2)当*p=*2时,此时*X=*{1},此时*b=c=*1,*bc=*1,

故log(*p*)*a*(*bc*)*=*0,log(*p*)*ab=*0,log(*p*)*ac=*0,

此时log(*p*)*a*(*bc*)*=*log(*p*)*ab*log(*p*)*ac.*

当*p>*2时,因为1,*a*,*a*2,…,*ap-*2相异,所以*a*≥2,

而*a*∈*X*,故*a*,*p*互质*.*

设*n=*log(*p*)*a*(*bc*),*n*1*=*log(*p*)*ab*,*n*2*=*log(*p*)*ac*,

则∃*k*1,*k*2∈N,使得*=pk*1*+b*,*=pk*2*+c*,

故*=*(*pk*1*+b*)(*pk*2*+c*),故≡*bc*(mod *p*),

设*n*1*+n*2*=t*(*p-*1)*+*s,0≤s≤*p-*2,则*n*1*n*2*=*s,

因为1,2,3,…,*p-*1除以*p*的余数两两相异,

且*a*,2*a*,3*a*,…,(*p-*1)*a*除以*p*的余数两两相异,

所以(*p-*1)!≡[*a×*2*a×*3*a*…*×*(*p-*1)*a*](mod *p*),故*ap-*1≡1mod *p*,

故*a*s≡*bc*(mod *p*),而*an*≡*bc*(mod *p*)*=bc*(mod *p*),其中0≤*n*≤*p-*2,

故s*=n*,即log(*p*)*a*(*bc*)*=*log(*p*)*ab*log(*p*)*ac.*

(3)当*b*≥2时,由(2)可得*bp-*1≡1mod *p*,若*b=*1,则*bp-*1≡1mod *p*也成立*.*

因为*n=*log(*p*)*ab*,所以*an*≡*b*(mod *p*)*.*

另一方面,*y*2≡*y*2≡(*xbk*)(*ak*)*n*(*p-*2)

≡(*xbk*)*akn*(*p-*2)≡(*xbk*)*bk*(*p-*2)≡*x*(*bp-*1)*k-*1≡*x*(1)*k-*1(mod *p*)≡*x*(mod *p*)*.*

因为*x*∈*X*,所以*x=y*2*.*